Enoncé	Proposition A	Proposition B	Proposition C	
$(2x-5)^2$ a pour forme développée :	$4x^2-25$	$4x^2-20x-25$	$4x^2-20x+25$	C
$9x^2-144$ a pour forme factorisée :	$(3x-12)(3x+12)$	$(3x-12)^2$	$(9x-12)(9x+12)$	A
La factorisation de $9x^2-16$ est :	$(3x-4)^2$	$(3x+4)(3x-4)$	$(3x+4)^2$	B
L'expression factorisée de $4x^2-12x+9$ est :	$(2x+3)(2x-3)$	$(2x+3)^2$	$(2x-3)^2$	C
$6-4(x-2)$ est égal à :	$2x-4$	$14-4x$	$-2-4x$	B
$f(x) = 5x^2+2x-3$. Par f, 0 a pour antécédent :	1	– 3	– 1	C
$g(x) = 2x^2-5x+3$. L'image de (– 3) par g est :	36	– 36	– 6	A

Exercice 1 Compléter pour que chaque égalité soit vraie pour toutes les valeurs de x :

$(x+3)^2 = x^2+6x+9$ $(2x-5)^2 = 4x^2-20x+25$ $49x^2-64 = (7x-8)(7x+8)$

Exercice 2 Soit A = $\frac{1}{4}\,[(a+b)^2-(a-b)^2]$.

1) Calculer A pour $a=1$ et $b=5$.

A = $\frac{1}{4}\,[(1+5)^2-(1-5)^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[(6)^2-(-4)^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[36-16]$

A = $\frac{1}{4}\times 20$

A = 5

2) Calculer A pour $a=-2$ et $b=-3$.

A = $\frac{1}{4}\,[((-2)+(-3))^2-((-2)-(-3))^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[(-5)^2-(-2+3)^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[25-1^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[25-1]$

A = $\frac{1}{4}\times 24$

A = 6

3) Alex affirme que le nombre A est égal au produit des nombres a et b.
A-t-il raison ? Justifier.

A = $\frac{1}{4}\,[(a+b)^2-(a-b)^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)]$

A = $\frac{1}{4}\,[a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2]$

A = $\frac{1}{4}\,[4ab]$

A = ab donc Alex a raison.

Exercice 3 On considère l'expression C = $(3x-5)(-5x+2)+(3x-5)^2$.

1) Développer et réduire C.

C = $(3x+(-5))(-5x+2)+(3x-5)^2$

C = $[3x\times(-5x)+3x\times 2+(-5)\times(-5x)+(-5)\times 2]+[(3x)^2-2\times 3x\times 5+5^2]$

C = $[(-15)x^2+6x+(+25)x+(-10)]+[9x^2-30x+25]$

C =$(-15)x^2+6x+25x+(-10)+9x^2-30x+25$

C = $-6x^2+x+15$

2) Factoriser C.

C = $(3x-5)\,(-5x+2)+(3x-5)\,(3x-5)$

C = $(3x-5)\,[(-5x+2)+(3x-5)]$

C = $(3x-5)\,[-5x+2+3x-5]$

C = $(3x-5)\,(-2x-3)$

Exercice 4 Factoriser A et B ; développer et réduire C.

A = $(x-1)^2-(8-x)(x-1)$

A = $(x-1)\,(x-1)-(8-x)\,(x-1)$

A = $(x-1)\,[(x-1)-(8-x)]$

A = $(x-1)\,[x-1-8+x]$

A = $(x-1)\,(2x-9)$

B = $x^2-26x+169$

B = $x^2-2\times 13\times x+13^2$

B = $(x-13)^2$

C = $(4x+1)^2-(5x-2)(3x-1)$

C = $(4x+1)^2-\big(5x+(-2)\big)(3x+(-1))$

C = $[(4x)^2+2\times 4x\times 1+1^2]-[5x\times 3x+5x\times(-1)+(-2)\times 3x+(-2)\times(-1)]$

C = $[16x^2+8x+1]-[15x^2+(-5x)+(-6)x+2]$

C = $[16x^2+8x+1]-[15x^2+(-11x)+2]$

C = $16x^2+8x+1-15x^2-(-11x)-2$

C = $16x^2+8x+1-15x^2+11x-2$

C = $x^2+19x-1$

Exercice 5 On pose E = $16-(5x-3)^2$.

1) Calculer la valeur de E pour $x=-1$.

E = $16-(5\times(-1)-3)^2$

E = $16-[(-5)-3]^2$

E = $16-(-8)^2$

E = $16-64$

E = -48

2) Développer et réduire E.

E = $16-[(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2]$

E = $16-[25x^2-30x+9]$

E = $16-25x^2+30x-9$

E = $-25x^2+30x+7$

3) Factoriser E.

E = $4^2-(5x-3)^2$

E = $[4-(5x-3)]\,[4+(5x-3)]$

E = $[4-5x+3]\,[4+5x-3]$

E = $[-5x+7]\,[5x+1]$

Exercice 6

1) Compléter l'identité remarquable : $(a+b)^2 =$ ___ En utilisant cette identité remarquable, calculer 103^2.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad 103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$

2) Développer $(x-1)^2$. Justifier que $99^2 = 9\,801$ en utilisant le développement précédent.

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ $\quad 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 + 1 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$

3) Développer $(x-1)(x+1)$. Justifier que $99 \times 101 = 9\,999$ en utilisant le développement précédent.

$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ $\quad 99 \times 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1 = 10\,000 - 1 = 9\,999$

Exercice 7

1) Développer et réduire D = $(a+5)^2 - (a-5)^2$.

D = $(a+5)^2 - (a-5)^2$

D = $(a^2 + 10a + 25) - (a^2 - 10a + 25)$

D = $a^2 + 10a + 25 - a^2 + 10a - 25$

D = $20a$

2) Utiliser ce résultat pour calculer $10\,005^2 - 9\,995$ sans l'aide de la calculatrice.

$10\,005^2 - 9\,995^2 = (10\,000 + 5)^2 - (10\,000 - 5)^2$

$= 20 \times 10\,000$

$10\,005^2 - 9\,995^2 = 200\,000$

Exercice 8 On sait que A = $(x-2)^2 - (x-1)(x-4)$.

1) Compléter le tableau :

x	$x-2$	$(x-2)^2$	$x-1$	$x-4$	$(x-1)(x-4)$	A
10	8	64	9	6	54	10
100	98	9 604	99	96	9 504	100

2) Développer et réduire A.

A = $(x-2)^2 - \big(x + (-1)\big)\big(x + (-4)\big)$

A = $[x^2 - 4x + 4] - [x^2 + (-4x) + (-1x) + 4]$

A = $x^2 - 4x + 4 - [x^2 - 5x + 4]$

A = $x^2 - 4x + 4 - x^2 + 5x - 4$

A = x

3) Utiliser ce qui précède pour trouver la valeur de x permettant de calculer facilement : $1\,234^2 - 1\,235 \times 1\,232$.

x = 1236

car $1\,234^2 - 1\,235 \times 1\,232 = (1\,236 - 2)^2 - (1\,236 - 1)(1\,236 - 4)$

Exercice 9 On considère le programme de calcul ci-contre :

Choisir un nombre de départ
Multiplier ce nombre par (-2)
Ajouter 5 au produit
Multiplier le résultat par 5
Ecrire le résultat obtenu.

1) a) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.
   b) Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?
2) Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?
3) Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x, l'expression $(x - 5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul. A-t-il raison ?

1) a) 2 x (-2) = - 4 $\quad$ (- 4) + 5 = 1 $\quad$ 1 x 5 = 5. $\quad$ Quand le nombre de départ est 2, on obtient 5.
   b) 3 x (-2) = - 6 $\quad$ (- 6) + 5 = (-1) $\quad$ (-1) x 5 = (-5). $\quad$ Quand le nombre de départ est 3, on obtient (-5).

2) 2,5 x (-2) = - 5 $\quad$ (- 5) + 5 = 0 $\quad$ 0 x 5 = 0. $\quad$ Quand le nombre de départ est 2,5, on obtient 0.

3) x x (-2) = - 2x $\quad$ [(- 2x) + 5] x 5 = (- 10x) + 25 . $\quad$ Quand le nombre de départ est x, on obtient (- 10x) + 25.

$(x - 5)^2 - x^2 = x^2 - 10x + 25 - x^2 = - 10x + 25$. $\quad$ Arthur a raison.

Exercice 10 On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre
Ajouter 1
Calculer le carré du résultat obtenu
Soustraire le carré du nombre de départ
Soustraire 1.

1) a) Montrer qu'on obtient 20 lorsque le nombre choisi est 10.
   b) Montrer qu'on obtient −6 lorsque le nombre choisi est −3.
   c) Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est 1,5.
2) Quelle conjecture peut-on faire à propos du résultat fourni par ce programme de calcul ? Démontrer cette conjecture.

1) a) 10 + 1 = 11 $\quad$ $11^2 = 121$ $\quad$ $121 - 10^2 = 121 - 100 = 21$ $\quad$ 21 – 1 = 20 $\quad$ On obtient bien 20.
   b) - 3 +1 = - 2 $\quad$ $(-2)^2 = 4$ $\quad$ $4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5$ $\quad$ - 5 – 1 = - 6 $\quad$ On obtient bien (-6).
   c) 1,5 +1 = 2,5 $\quad$ $2{,}5^2 = 6{,}25$ $\quad$ $6{,}25 - 1{,}5^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$ $\quad$ 4 – 1 = 3 $\quad$ On obtient 3.

2) On peut supposer que le résultat est le double du nombre de départ.

$(x+1)^2 - x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1 = 2x$ $\quad$ Quand le nombre de départ est x, on obtient $2x$.

Exercice 11

1) Développer et réduire l'expression P = $(x+12)(x+2)$

P = $x \times x + x \times 2 + 12 \times x + 12 \times 2$

P = $x^2 + 2x + 12x + 24$

P = $x^2 + 14x + 24$

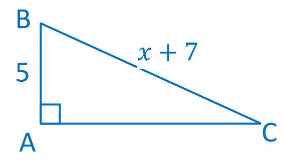
2) Factoriser l'expression Q = $(x+7)^2 - 25$.

Q = $(x+7)^2 - 5^2$

Q = $(x + 7 - 5)(x + 7 + 5)$

Q = $(x+2)(x+12)$

3) ABC est un triangle rectangle en A ; x désigne un nombre positif ; BC = $x + 7$; AB = 5.
Faire un schéma et montrer que AC ^{2} = $x^2 + 14x + 24$.



Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

BC² = AB² + AC²
$(x + 7)^2$ = 5² + AC²
AC² = $(x + 7)^2 - 5^2$

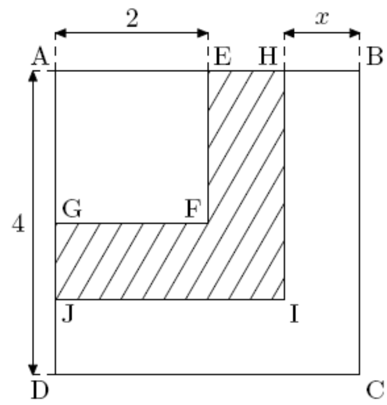
AC² = Q = $(x + 2)(x + 12)$
AC² = P = $x^2 + 14x + 24$
AC² = $x^2 + 14x + 24$

Exercice 12

1) Dans la figure ci-contre, AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés.
Calculer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à la partie hachurée.

M = $(4 - x)^2 - 2^2$ N = $(4 - x - 2)^2$ P = $4^2 - x^2 - 2^2$

AH = 4 – x Aire (AHIJ) = $(4 - x)^2$
Aire (hachurée) = Aire (AHIJ) – Aire (AEFG) = $(4 - x)^2 - 2^2$ = M



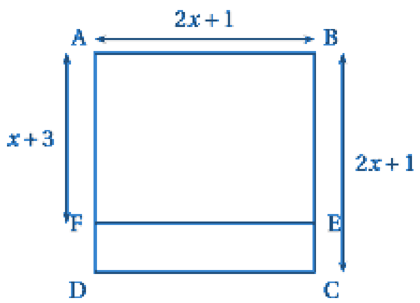
2) Développer et réduire Q = $(4 - x)^2 - 4$.
Q = $4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2 - 4$
Q = $16 - 8x + x^2 - 4$
Q = $x^2 - 8x + 12$

3) Factoriser Q.
Q = $(4 - x)^2 - 2^2$
Q = $(4 - x + 2)(4 - x - 2)$
Q = $(6 - x)(2 - x)$

4) Calculer Q pour x = 2. Que traduit ce résultat pour la figure ?
Si x = 2, Q = 6 x 0 = 0. Dans ce cas, les points E et H sont confondus (ainsi que G et J), et il n'y a pas de partie hachurée.

Exercice 13

Sur la figure dessinée ci-contre, ABCD est un carré et ABEF est un rectangle.
On a AB = BC = $2x + 1$ et AF = $x + 3$ où x désigne un nombre supérieur à deux.
L'unité de longueur est le centimètre.



Partie A : Étude d'un cas particulier x = 3.

1) Pour x = 3, calculer AB et AF.
Si x = 3, AB = 2 x 3 + 1 = 6 + 1 = 7 et AF = 3 + 3 = 6.

2) Pour x = 3, calculer l'aire du rectangle FECD.
Si x = 3, Aire (ABCD) = AB² = 7 x 7 = 49 et Aire (ABEF) = AF² = 6² = 36 donc Aire (FECD) = 49 – 36 = 13 cm².

Partie B : Étude du cas général. x désigne un nombre supérieur à deux.

1) Exprimer la longueur FD en fonction de x.
Comme F ∈ [AD], FD = AD – AF = $2x + 1 - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$ FD = $(x - 2)$ cm

2) En déduire que l'aire de FECD est égale à $(2x + 1)(x - 2)$.
Aire (FECD) = CD x FD = $(2x + 1)(x - 2)$.

3) Exprimer en fonction de x, les aires du carré ABCD et du rectangle ABEF.
Aire (ABCD) = $(2x + 1)^2$ et Aire (ABEF) = AB x AF = $(2x + 1)(x + 3)$.

4) En déduire que l'aire du rectangle FECD est : $(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$.
Aire (FECD) = Aire (ABCD) – Aire (ABEF) = $(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$

5) Les deux aires trouvées aux questions 2) et 4) sont égales et on a donc :$(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3) = (2x + 1)(x - 2)$.
Cette égalité traduit-elle un développement ou une factorisation? C'est une factorisation.

Problème

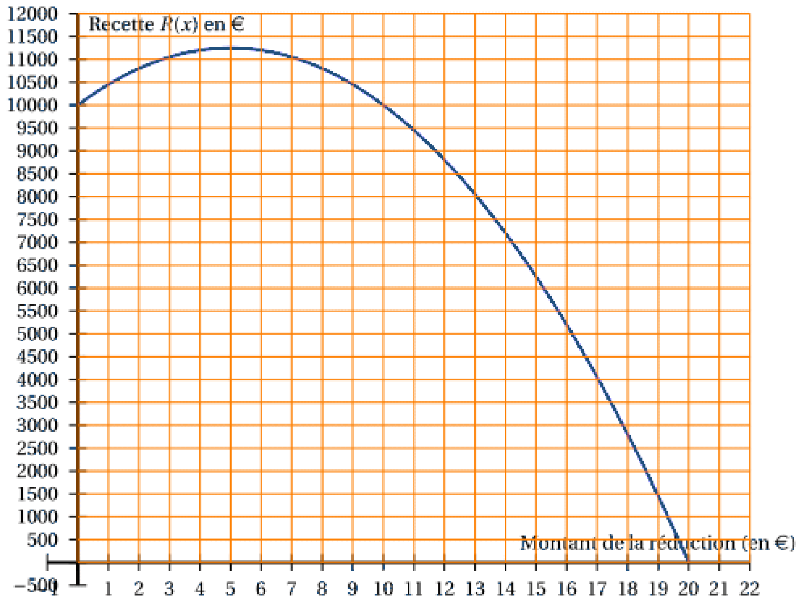
Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20 €.
Il a constaté que chaque réduction de 1 euro du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Partie 1

Compléter le tableau puis développer l'expression de la recette obtenue à la dernière ligne.

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	20 × 500 = 10 000
1	19	550	19 x 550 = 10 450
2	18	600	18 x 600 = 10 800
4	16	700	16 x 700 = 11 200
x	$20 - x$	$500 + 50x$	$(20 - x)$ x $(500 + 50x)$

$$\begin{aligned}(20 - x)(500 + 50x) &= 20 \times 500 + 20 \times 50x - x \times 500 - x \times 50x \\ &= 10\,000 + 1\,000x - 500x - 50x^2 \\ &= 10\,000 + 500x - 50x^2\end{aligned}$$



Partie 2

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette.
Il utilise la fonction R donnant la recette (en €) en fonction du montant x de la réduction (en €).
Sa courbe représentative est donnée ci-contre.
Par lecture graphique, répondre aux questions :

1) Quelle est la recette pour une réduction de 2€ ?

Pour une réduction de 2€, la recette est de 10 800€.

2) Quel est l'antécédent de 4 050 par R ?
Interpréter ce résultat pour le problème.

L'antécédent de 4 050 est 17. Lorsque la réduction est de 17€, la recette du théâtre est de 4 050€.

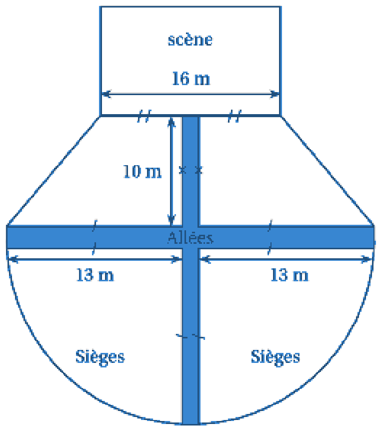
3) Quelle est l'image de 8 par la fonction R ?
Interpréter ce résultat.

L'image de 8 est 10 800 : lorsque la réduction est de 8 €, la recette du théâtre est de 10 800€.

4) Quelle est la recette maximale ? Quel est alors le prix de la place ?

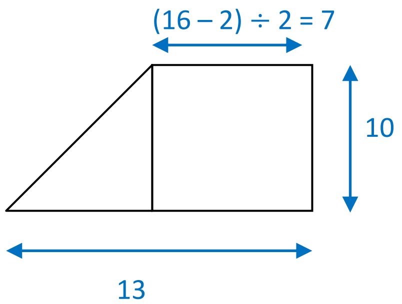
La recette maximale est 11 250 €, pour une réduction de 5€. La place coute alors 15€.

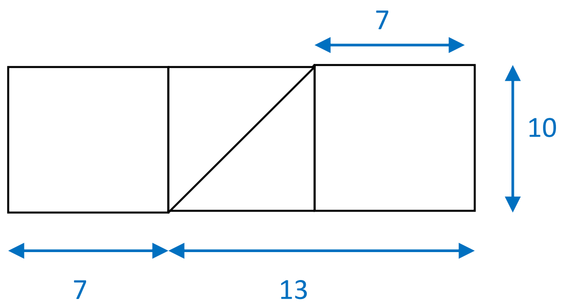
Partie 3 La salle de spectacle a la forme ci-contre.
Les sièges sont disposés dans quatre zones : deux quarts de disques et deux trapèzes, séparées par des allées ayant une largeur de 2 m.
On peut placer en moyenne 1,8 sièges par m^2 dans la zone des sièges.



Calculer le nombre de places disponibles dans ce théâtre.

L'aire des 2 quarts de disques est l'aire d'un demi-disque de rayon 13 m : π x 13² ÷ 2 = 84,5 π m².
Les 2 trapèzes forment un rectangle de 10m sur 20 m. Leur aire est donc 10 x 20 = 200 m².





La zone des sièges a donc une aire de 200 + 84,5π m². (200 + 84,5π) x 1,8 ≈ 838 Il y a environ 838 places dans ce théâtre.